Lycée pilote Elkef | Devoir de synthèse №3 | $4^{ème}sc_1$

Mr : Necib.k | Mathématiques | Mai 2008

Durée : $3^h$

Exercice 1 :( 6 points)

I-

Dans un lycée 23 % des élèves se font vacciner contre la grippe. Pendant l'hiver, il y a une épidémie de grippe et 10 % des élèves contractent la maladie. De plus 3 % des élèves vaccinés ont la grippe.

1) On choisit au hasard l'un des élèves de ce lycée, tous les élèves ayant la même probabilité d'être choisis. On considère les évènements suivants :

A : « L'élève a été vacciné » ;

B : « L'élève a eu la grippe » ;

C : « L'élève a été vacciné et a eu la grippe ».

a. Calculer la probabilité des évènements A, B et C.

b. Calculer la probabilité de l'évènement $A \cup B$.

2) On choisit au hasard un des élèves non vaccinés. Calculer la probabilité de l'évènement :

« L'élève a eu la grippe ».

3) On choisit au hasard cinq élèves de ce lycée. Calculer la probabilité de l'événement

D :<<Seulement trois élèves ont eu la grippe >>

Kais Nsib

II-

Dès l'apparition des premiers symptômes de l'épidémie, l'infirmière du lycée relève pendant 8 jours le nombre d'élèves malades. Le tableau ci-dessous indique les résultats observés.

| Numéro du jour X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'élèves grippés Y | 2 | 5 | 9 | 14 | 17 | 23 | 27 | 31 |

1) Construire dans un repère orthogonal le nuage de points associé à cette série statistique.

On prendra les unités suivantes :

- en abscisse : 2 cm pour 1 jour ;
- en ordonnée : 1 cm pour 2 élèves.

2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.

3) a. Déterminer un ajustement affine de y en X par la méthode de Mayer.

b. Estimer à partir de combien de jours au moins 64 élèves du lycée seront atteints par la grippe.

## Exercice 2 : ( 4,5 points )

L'espace $\xi$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points A(3,1,0) , B(1,2,0) , C(3,2,1) et D(0,0,m) où m est un réel positif.

1) a. Calculer $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b. En déduire l'aire du triangle ABC.

c. Déterminer une équation cartésienne du plan P = (ABC). Prouver que $D \notin P$

2) Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est V = $\frac{2m+5}{6}$

3) Soit $S_m$ l'ensemble des points M(x,y,z) tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$.

Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}_+$ $S_m$ est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

4) a. Montrer que $S_m$ est tangente à P ssi m = 2.

Montrer dans ce cas que la droite (DB) est perpendiculaire au plan P.

b. En déduire le point de contact de $S_2$ et P.

## Exercice 3 :( 6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = (1 - \ln(x))^2$

1) Etudier les variations de la fonction f.

2) a. Soit g la restriction de g à l'intervalle $[e,+\infty[$.

Montrer que g réalise une bijection de $[e,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

b. Montre que pour tout $x \in [0,+\infty[$ $g^{-1}(x) = e^{1+\sqrt{x}}$.

3) Tracer la courbe (C) de f et la courbe (C') de $g^{-1}$ dans un même repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ .

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_1^e (1-\ln(t))^n dt$.

a. Calculer $I_1$ .

b. En utilisant une intégration par partie montrer que Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$.

c. On désigne par A et B les points de (C) d'abscisses respectifs 1 et e.

Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l' arc $\overset{\frown}{AB}$ de la courbe (C) autour de l'axe $(0,\vec{i})$. Calculer V.

Kais Nsib

## Exercice 4 : (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{-x}$ .

On note (C ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a. Etudier les variations de la fonction f.

b. Tracer (C ).

2) On considère l'équation différentielle : (E) : $y' + y = e^{-x}$.

a. Vérifier que la fonction f est solution de (E).

b. Montrer que la fonction $\varphi$ est solution de (E) si, et seulement si, $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : y' + y = 0.

3. Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).